Université Abdelmalek Essaâdi
Faculté des Sciences et Techniques
Tanger

2010 Semestre II
MIPC I-6 & GEGM I-2

Module P111
Electricité

Serie 1

I/ Soit le champ de vecteurs :

$$A(x,y) = \frac{xj - yi}{x^2 + y^2}$$

a/ Calculer **rotA**

b/ Evaluer la circulation de **A** le long d'une courbe fermée C. (l'origine 0 est à l'extérieur du domaine limité par C).

II/ Soit dans un système cartésien orthonormé, les deux champs de vecteurs : $A(A_x = -By/2,\ A_y = Bx/2,\ A_z = 0)$ et $A'(A'_x = -By\ ;A'_y = A'_z = 0)$.

1/Calculer **rotA** et **rotA'**.

2/ Montrer que le champ **C = (A – A')** dérive d'un potentiel scalaire dont on donnera la valeur.

III/ On donne en coordonnées sphériques le potentiel indépendant de φ.

$$U(r,\theta) = -A/r + B/r^3(3\cos^2\theta - 1)$$

1/Montrer que le laplacien de U est nul.

2/Calculer les composantes du champ dérivant de U.

IV/ Calculer sur les chemins OAM et OBM, la circulation du champ de vecteurs de composantes $E_x = 6xy$ $E_y = 3x^2 - 3y^2$
Conclure et calculer le potentiel dont derive $\vec{E}$
$A = (x_1, 0)$ $B(0, y_1)$ $M(x_1, y_1)$

ETUSUP .com

Institut la centrale Electrostatique Serie 1 04-10

I/ a) $\vec{A}(x,y) = \dfrac{x\vec{j} - y\vec{i}}{x^2+y^2}$; $A_x = \dfrac{-y}{x^2+y^2}$ $A_y = \dfrac{x}{x^2+y^2}$; $A_z = 0$

$$\vec{rot}\vec{A} = \vec{\nabla}\wedge\vec{A} = \begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}A_x\\ A_y\\ A_z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 - 0\\ 0 - 0\\ \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \vec{rot}\vec{A} = \vec{0}$

b) $\oint_C \vec{A}.d\vec{l} = \iint_S \vec{rot}\vec{A}.d\vec{S} = 0$

II/ $\vec{A}\left(A_x = -\dfrac{By}{2} ; A_y = \dfrac{Bx}{2} ; A_z = 0\right)$ $\vec{A}'$ $(A'_x = -By ; A'_y = A'_z = 0)$

1) $\vec{rot}\vec{A} = \vec{\nabla}\wedge\vec{A} = \begin{pmatrix}0 - 0\\ 0 - 0\\ \frac{B}{2} + \frac{B}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\B\end{pmatrix}$. $\Rightarrow \vec{rot}\,\vec{A} = B\vec{k}$

$\vec{rot}\vec{A}' = \vec{\nabla}\wedge\vec{A}' = \begin{pmatrix}0 - 0\\ 0 - 0\\ 0 + B\end{pmatrix} = B\vec{k}$

2) $\vec{C} = \vec{A} - \vec{A}'$; $\vec{rot}\,\vec{C} = \vec{rot}\,\vec{A} - \vec{rot}\,\vec{A}' = \vec{0}$ donc $\vec{C}$ derive d'un potentiel càd $\exists\, U$ fonction scalaire telque $\vec{C} = -\vec{grad}\,U$

Alors $\begin{cases}\dfrac{\partial U}{\partial x} = C_x = A_x - A'_x = \dfrac{By}{2} & (1)\\ \dfrac{\partial U}{\partial y} = C_y = A_y - A'_y = \dfrac{Bx}{2} & (2)\\ \dfrac{\partial U}{\partial z} = C_z = 0 & (3)\end{cases}$

(3) $\Rightarrow U(x,y,z) = U(x,y)$
U ne depend pas de z

(1) $\Rightarrow U = \dfrac{Bxy}{2} + f(x)$

(2) $\Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow f(x) = K$

d'où $U(x,y) = \dfrac{Bxy}{2} + K$

III/ $U(r,\theta) = -\dfrac{A}{r} + \dfrac{B}{r^3}.(3\cos^2\theta - 1)$

1/ • $\dfrac{\partial U}{\partial r} = \dfrac{A}{r^2} - 3\dfrac{B}{r^4}(3\cos^2\theta - 1)$; $\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial U}{\partial r}\right) = \dfrac{\partial}{\partial r}\left(A - \dfrac{3B}{r^2}(3\cos^2\theta - 1)\right) = \dfrac{6B}{r^3}(3\cos^2\theta - 1)$

• $\dfrac{\partial U}{\partial \theta} = -\dfrac{6B}{r^3}\sin\theta.\cos\theta$; $\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta.\dfrac{\partial U}{\partial\theta}\right) = \dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(-\dfrac{6B}{r^3}\sin^2\theta.\cos\theta\right) =$
$= -\dfrac{6B}{r^3}(2\sin\theta.\cos^2\theta - \sin^3\theta)$

• $\dfrac{\partial U}{\partial \phi} = 0$

Laplacien de U : $\Delta U = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial U}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2\sin\theta}.\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta.\dfrac{\partial U}{\partial\theta}\right) + \dfrac{1}{r^2\sin^2\theta}\dfrac{\partial^2 U}{\partial\phi^2}$

$\Delta U = \dfrac{6B}{r^5}(3\cos^2\theta - 1) + \dfrac{-6B}{r^5}(2\cos^2\theta - \sin^2\theta) + 0 = \dfrac{6B}{r^5}(3\cos^2\theta - 1 - 2\cos^2\theta + \sin^2\theta) = 0$

2/ $\vec{V} = -\vec{grad}\,U$ $V_r = -\dfrac{\partial U}{\partial r} = -\dfrac{A}{r^2} + \dfrac{3B}{r^4}(3\cos^2\theta - 1)$

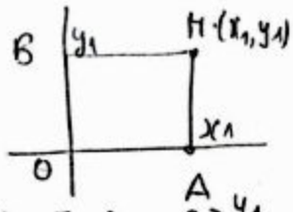
$V_\theta = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial U}{\partial\theta} = \dfrac{6B}{r^4}\sin\theta.\cos\theta$

$V_\varphi = -\dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial U}{\partial\varphi} = 0$

d'où $\vec{V} = \left(-\dfrac{A}{r^2} + \dfrac{3B}{r^4}(3\cos^2\theta - 1)\right)\vec{e_r} + \dfrac{6B}{r^4}\sin\theta\cos\theta\,\vec{e_\theta}$

ETUSUP .com

Exercice 4



- Circulation elementaire $dC = \vec{E}.d\vec{l}$

$$C_1 = \int_{OAM} \vec{E}.d\vec{l} = \int_{OAM} (E_x\vec{i}+E_y\vec{j})(dx\vec{i}+dy\vec{j}) = \int_{OAM} E_x dx + E_y dy$$

$$= \int_0^{x_1} E_x dx + \int_0^{y_1} E_y dy = \int_0^{x_1} 6xy\, dx + \int_0^{y_1} 3x^2-3y^2\, dy = \left[3x^2y\right]_0^{x_1} + \left[3x^2y-y^3\right]_0^{y_1}$$

$$= 3x_1^2y + 3x^2y_1 - y_1^3$$

$$C_2 = \int_{OBM} \vec{E}\, d\vec{l} = \int_0^{y_1} E_y dy + \int_0^{x_1} 6xy\, dx = 3x_1^2y + 3x^2y_1 - y_1^3$$

- La circulation de E ne depend pas du chemin suivi

- $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\, U$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x} = 6xy \\ \dfrac{\partial U}{\partial y} = 3x^2-3y^2 \end{cases}$$

ETUSUP .com

ETUSUP.com

Programmation
Cours
Informatique
Optique
Chimie
Algébre
Corrigés
Mathématiques
Travaux Pratiques
Electricité
Physique
Résumés
Analyse
Diapo
Exercices
Livres
Contrôles Continus
Langues
MTU
Mécanique
Thermodynamique
Divers
Multimedia
Economie
Travaux Dirigés
Droit
Chimie Organique

et encore plus..